



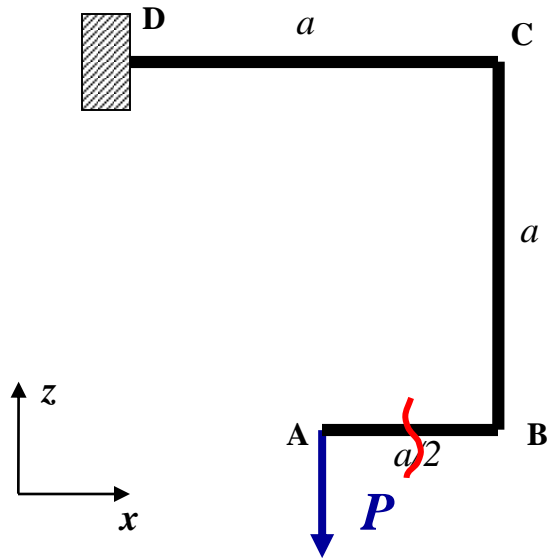
Wykład 4

Konstrukcje prętowe statycznie wyznaczalne

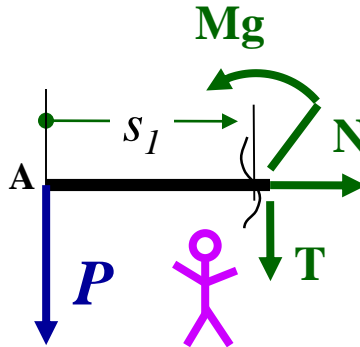
Wyznaczanie przemieszczeń
(przykłady)

Zad.1. Wyznaczyć przemieszczenia w ramie ściśle płaskiej

Dane: P, a, EJ_y



Przedział I (A÷B)



Suma sił w osi pręta:

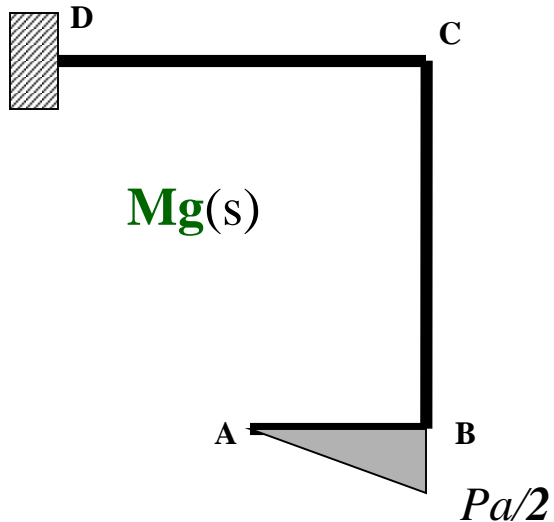
$$\rightarrow N(s) = 0$$

Suma sił \perp do osi pręta:

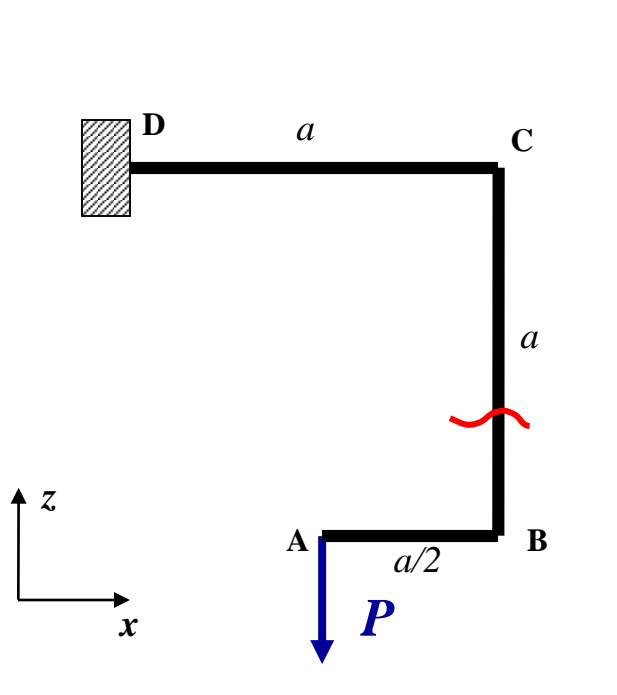
$$\rightarrow T(s) = -P$$

Suma momentów wzgl. p.p.:

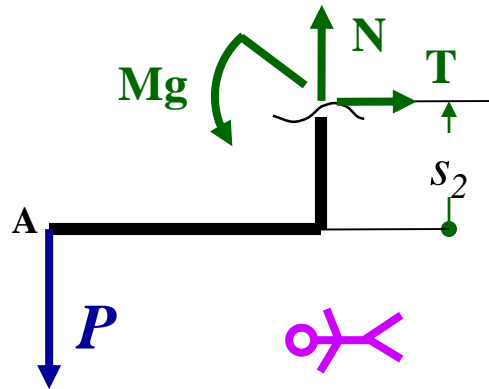
$$\rightarrow Mg(s) = -P \cdot s_1$$



Wyznaczenie rozkładu $Mg(s)$ w stanie przygotowanym



Przedział II (B÷C)



Suma sił w osi pręta:

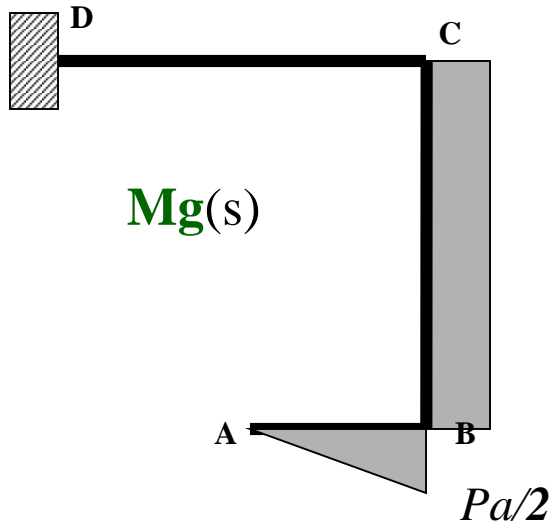
$$\rightarrow N(s) = P$$

Suma sił \perp do osi pręta:

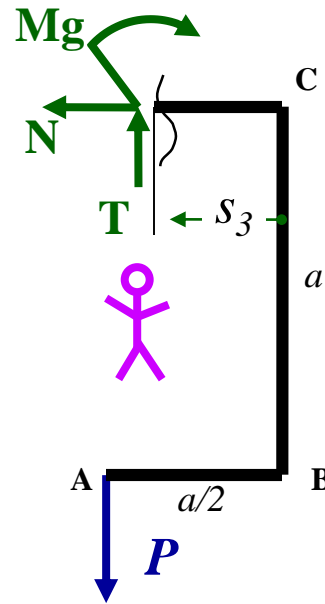
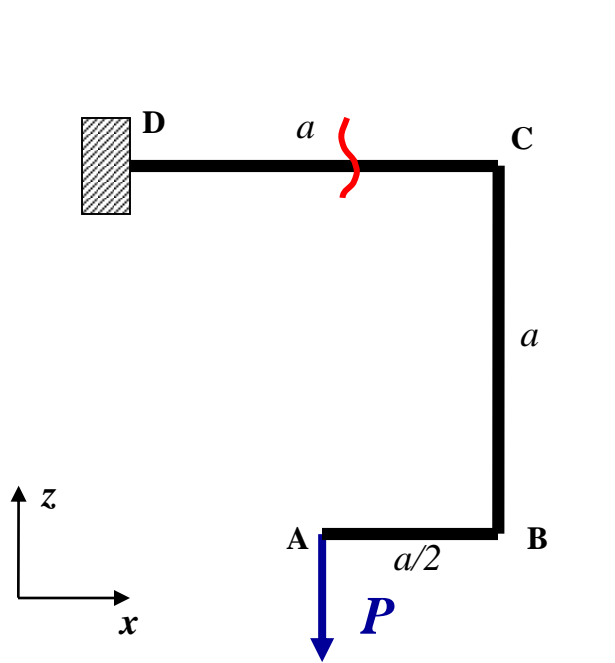
$$\rightarrow T(s) = 0$$

Suma momentów wzgl. p.p.:

$$\rightarrow Mg(s) = -P \cdot \frac{a}{2}$$



Wyznaczenie rozkładu $Mg(s)$ w stanie przygotowanym



Przedział III (C÷D)

Suma sił w osi pręta:

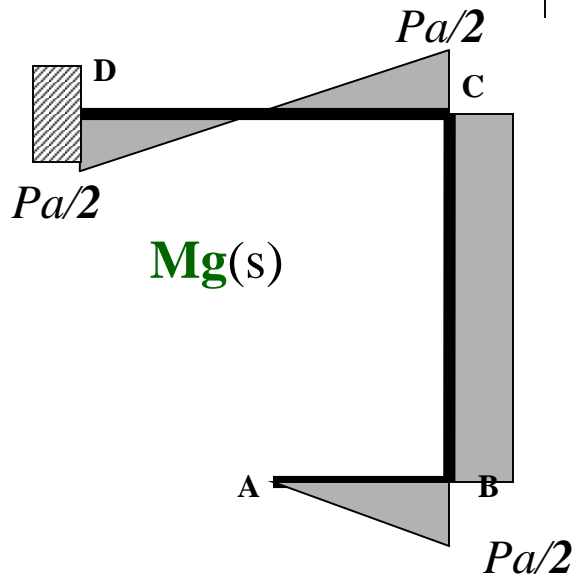
$$\rightarrow N(s) = 0$$

Suma sił \perp do osi pręta:

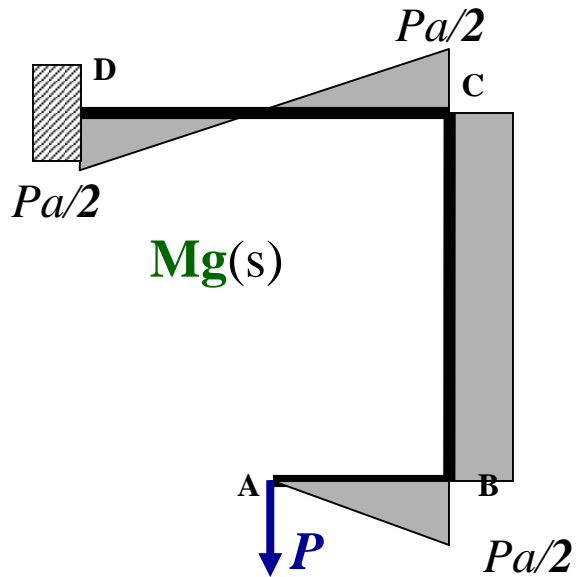
$$\rightarrow T(s) = P$$

Suma momentów wzgl. p.p.:

$$\rightarrow Mg(s) = P \cdot \left(\frac{a}{2} - s_3 \right)$$

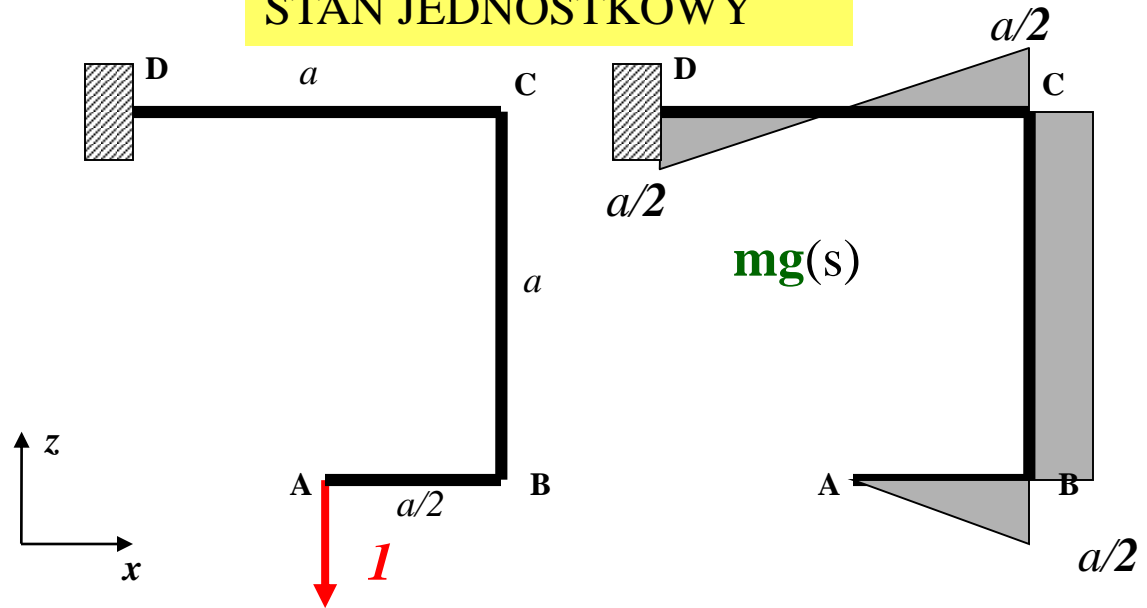


Wyznaczyć przemieszczenia pionowe punktu A $w_A = ?$



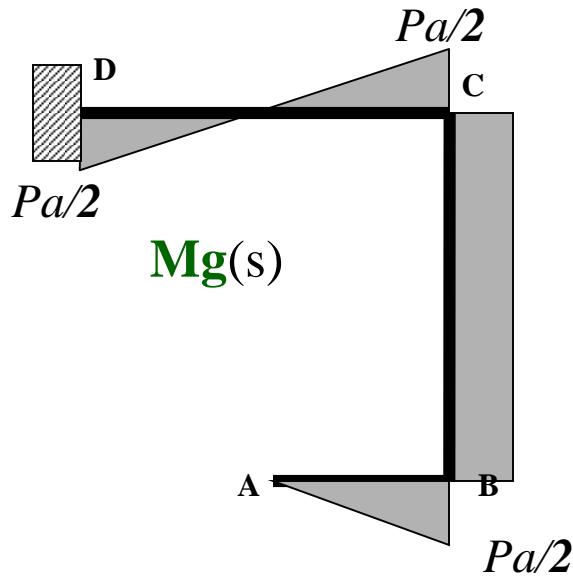
STAN PRZYGOTOWANY

STAN JEDNOSTKOWY



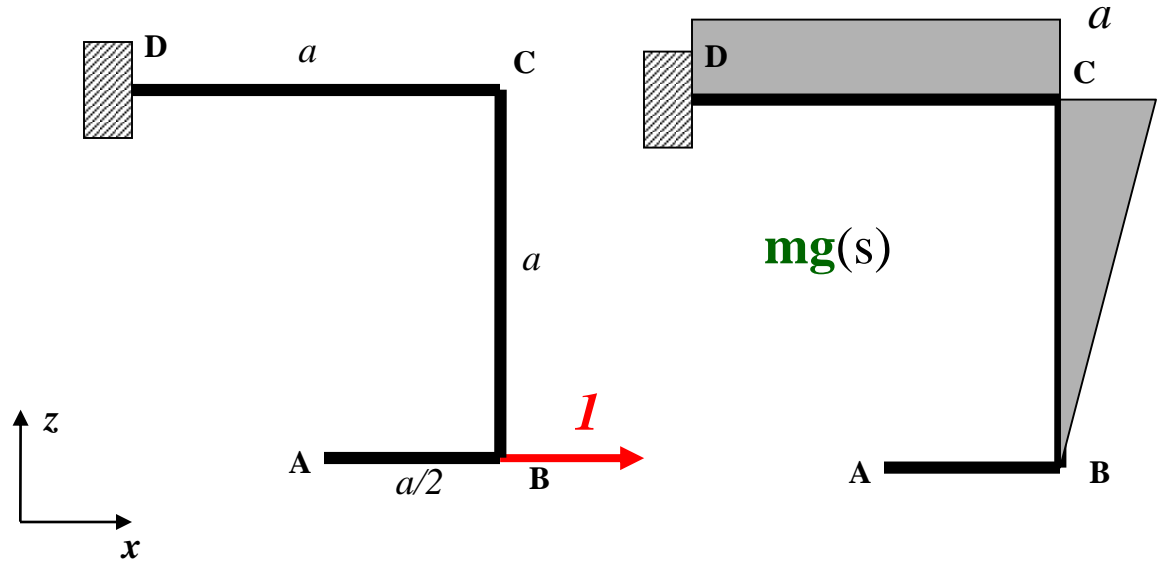
$$w_A \cong \int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot 3 + a \cdot \frac{Pa}{2} \cdot \frac{a}{2} \right) = \frac{3 Pa^3}{8 EJ_y}$$

Wyznaczyć przemieszczenia poziome punktu B $u_B = ?$



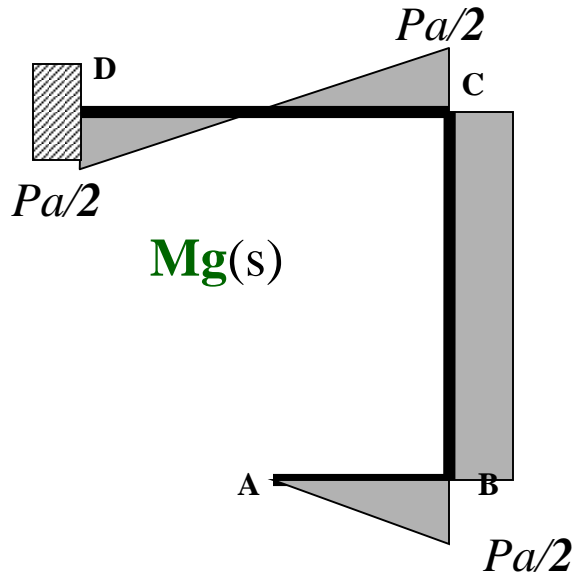
STAN PRZYGOTOWANY

STAN JEDNOSTKOWY



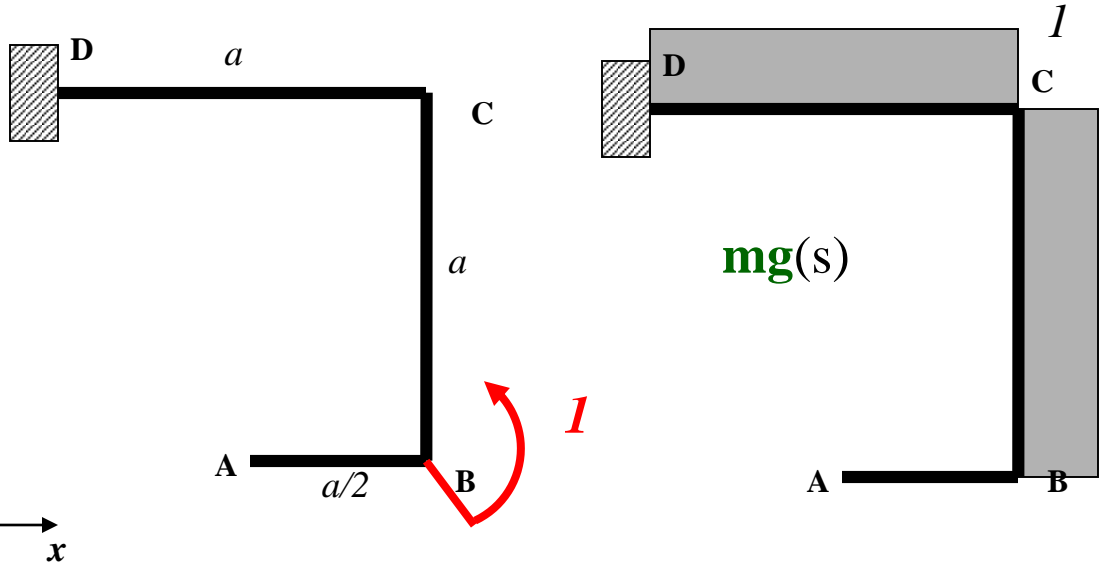
$$u_B \cong \int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{2} \cdot \frac{a}{2}}_{\text{t.W.}} \cdot 0 + \underbrace{a \cdot \frac{Pa}{2}}_{\text{t.W.}} \cdot \underbrace{\frac{a}{2}}_{\text{t.W.}} + \underbrace{a \cdot a}_{\text{t.W.}} \cdot 0 \right) = \frac{Pa^3}{4EJ_y}$$

Wyznaczyć kąt obrotu naroża B $\vartheta_B = ?$



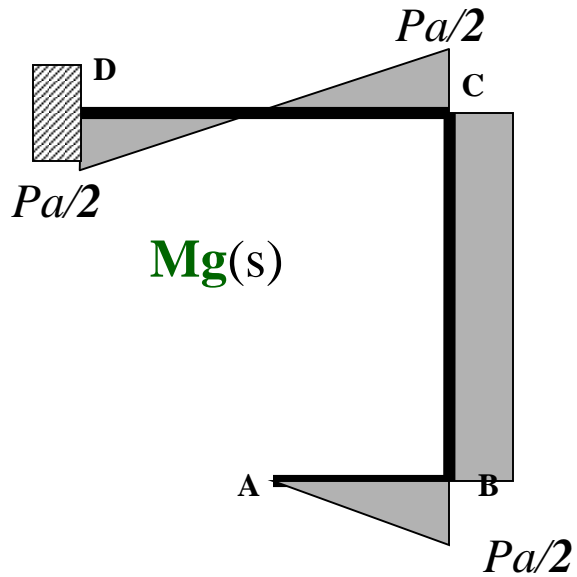
STAN PRZYGOTOWANY

STAN JEDNOSTKOWY



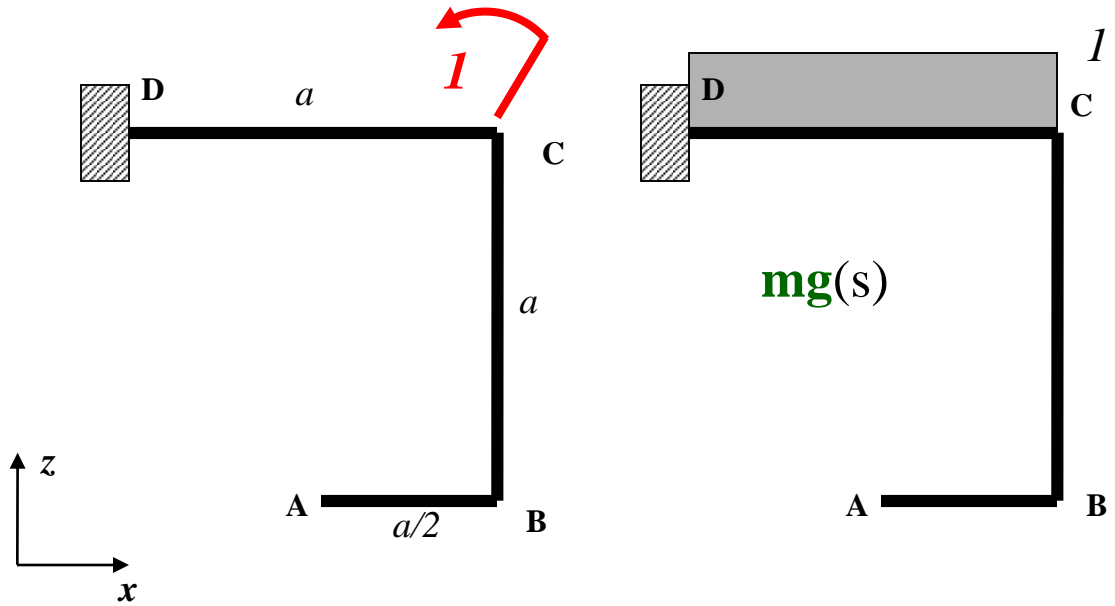
$$\vartheta_B \cong \int_l \frac{M_s \cdot m_s}{EJ_y} \cdot ds = \frac{\text{t.W.}}{EJ_y} \left(0 + \frac{Pa}{2} \cdot a \cdot 1 + a \cdot 1 \cdot 0 \right) = \frac{Pa^2}{2EJ_y}$$

Wyznaczyć kąt obrotu naroża C $\vartheta_C = ?$



STAN PRZYGOTOWANY

STAN JEDNOSTKOWY

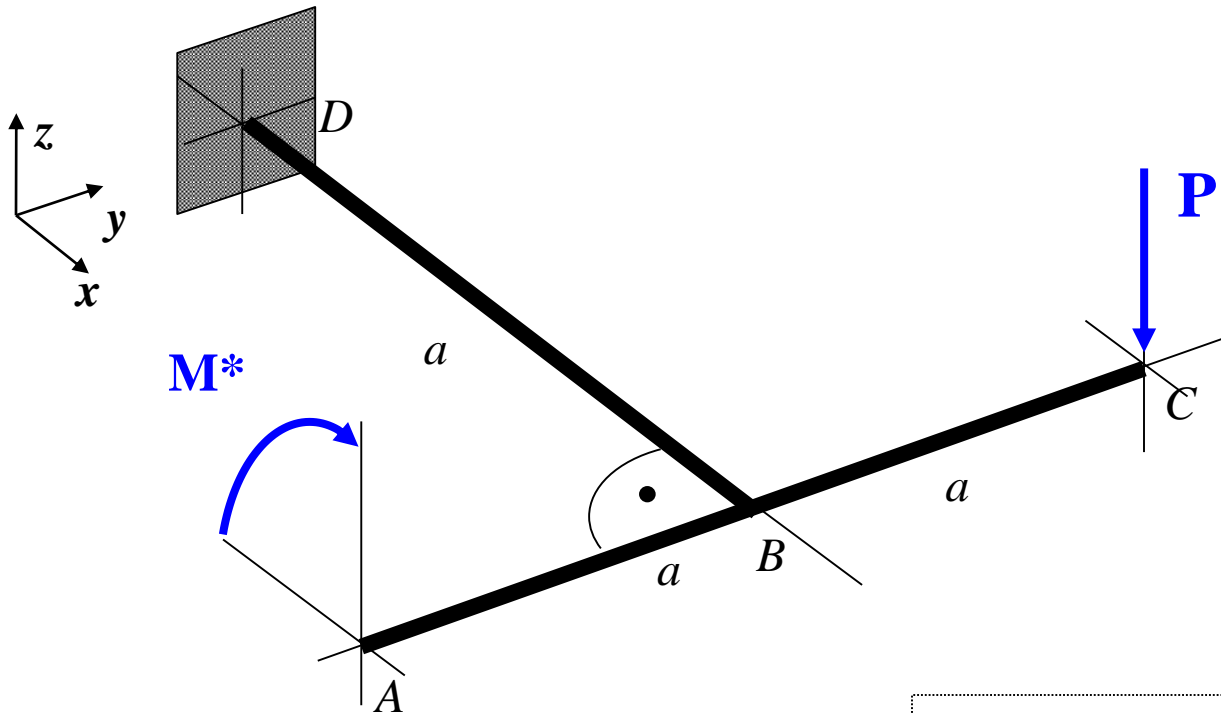
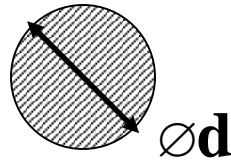


$$\vartheta_C \cong \int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} (0 + 0 + \underbrace{a \cdot 1 \cdot 0}_{\substack{\text{t.W.} \\ \text{t.W.}}}) = 0$$



Zad.2. Wyznaczyć przemieszczenia w ramie płaskiej obciążonej niepłasko

Dane: \mathbf{P} , \mathbf{M}^* , a , d , E , ν

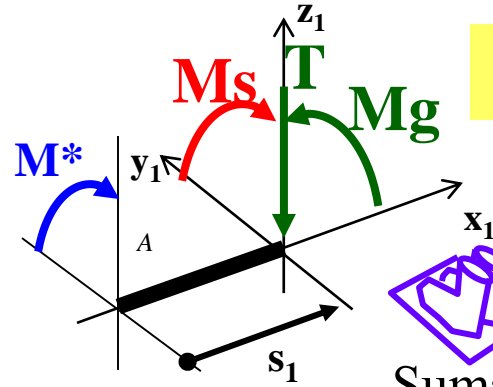
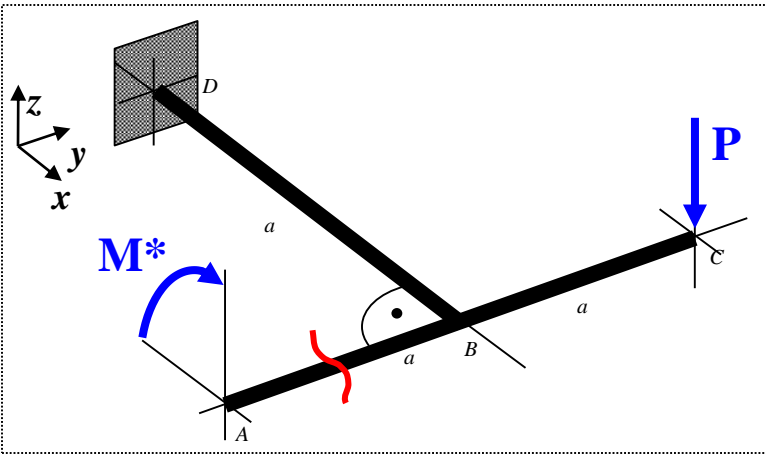


Charakterystyki przekroju:

$$J_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$J_s = J_o = \frac{\pi d^4}{32}$$

Wyznaczenie składowych wysiłku przekroju T , Mg , Ms (3 przedziały)



Przedział I (A÷B)

Suma sił \perp do osi pręta:

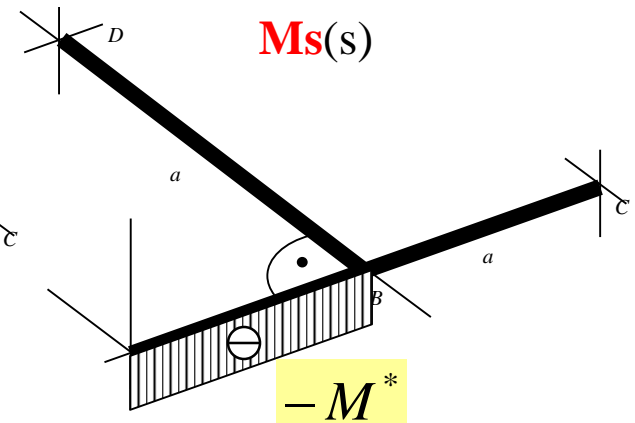
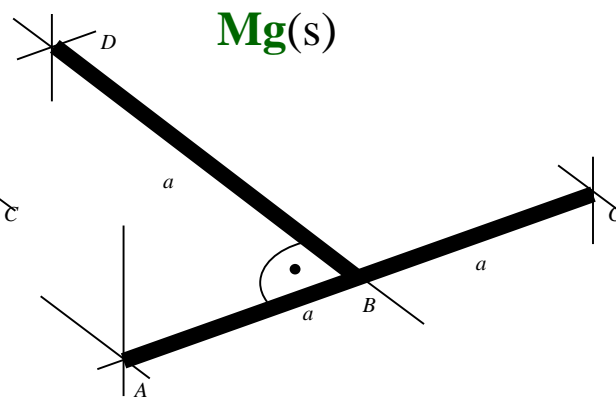
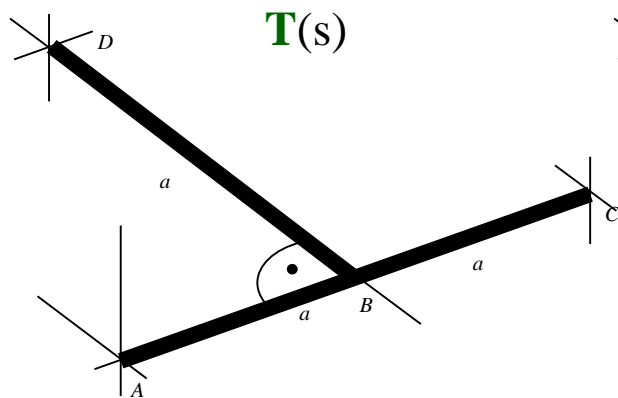
$$\rightarrow T(s) = 0$$

Suma momentów wzgl. osi y_1 :

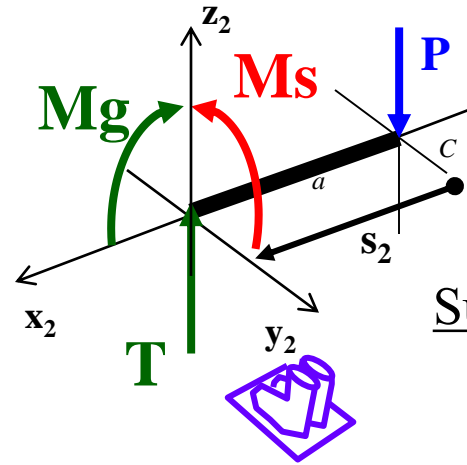
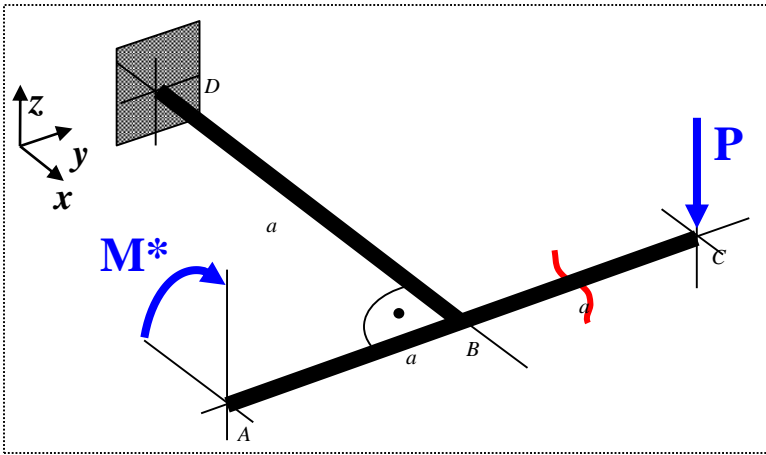
$$\rightarrow Mg(s) = 0$$

Suma momentów wzgl. osi x_1 :

$$Ms(s) = -M^*$$



Wyznaczenie składowych wysiłku przekroju T , Mg , Ms (3 przedziały)



Przedział II (B÷C)

Suma sił \perp do osi pręta:

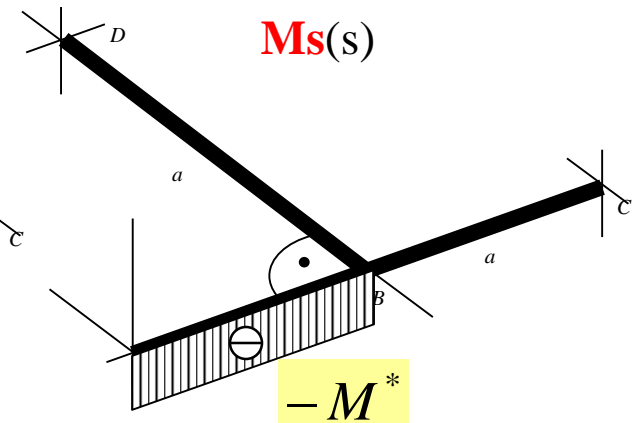
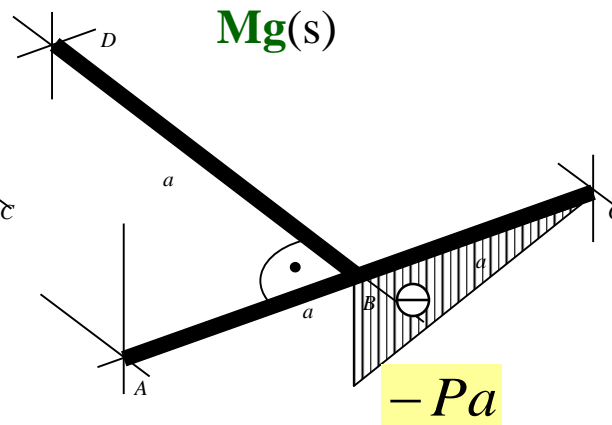
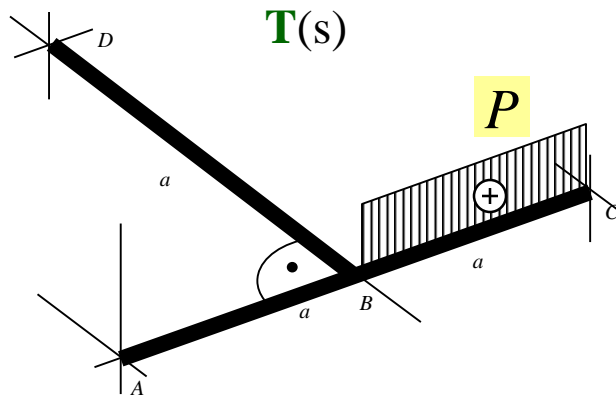
$$\rightarrow T(s) = P$$

Suma momentów wzgl. osi y_2 :

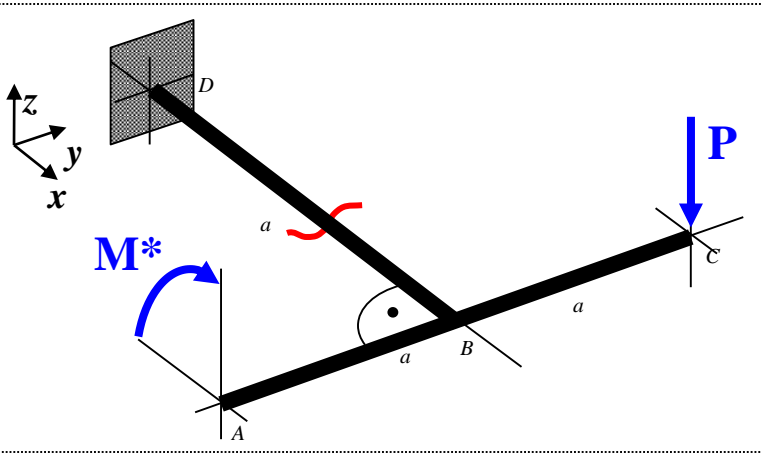
$$\rightarrow Mg(s) = -P \cdot s_2$$

Suma momentów wzgl. osi x_2 :

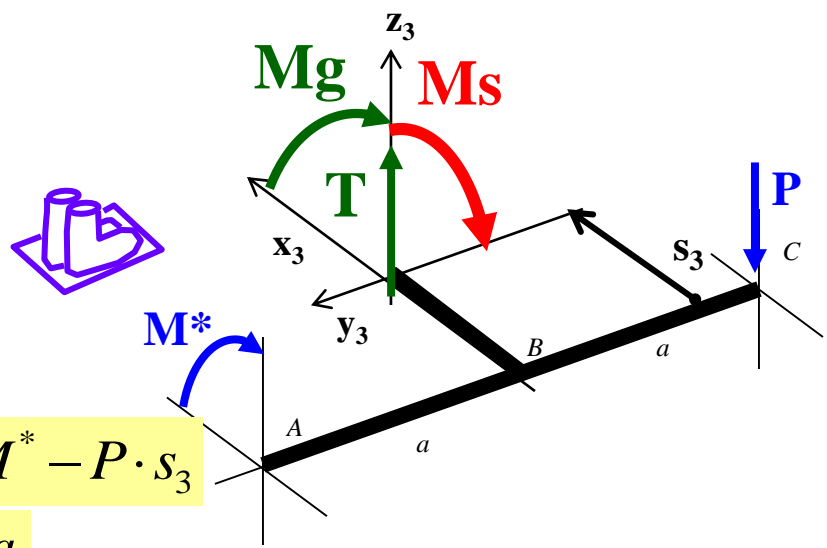
$$Ms(s) = 0$$



Wyznaczenie składowych wysiłku przekroju T , Mg , Ms (3 przedziały)



Przedział III (B÷D)



Suma sił \perp do osi pręta:

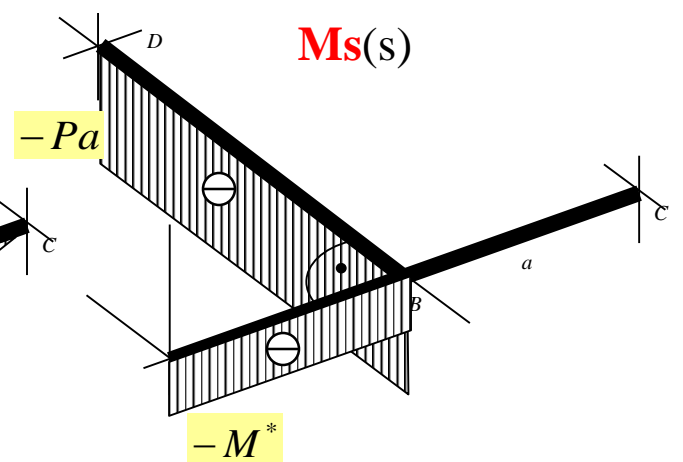
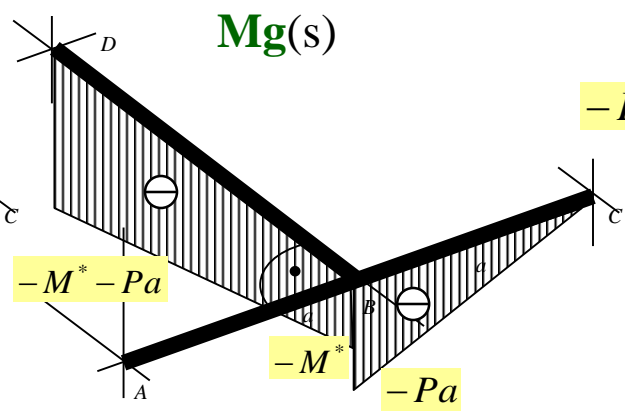
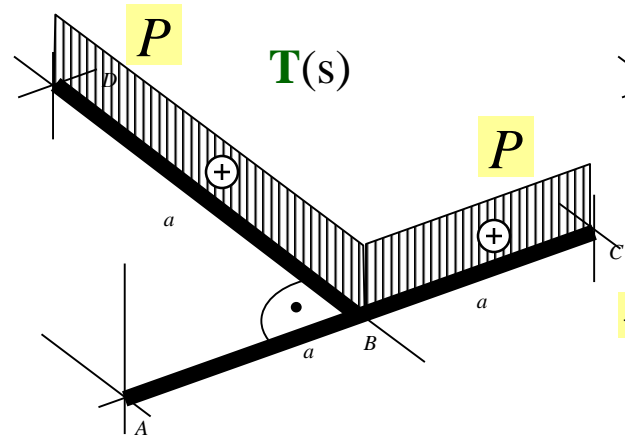
$$\rightarrow T(s) = P$$

Suma momentów wzgl. osi y_3 :

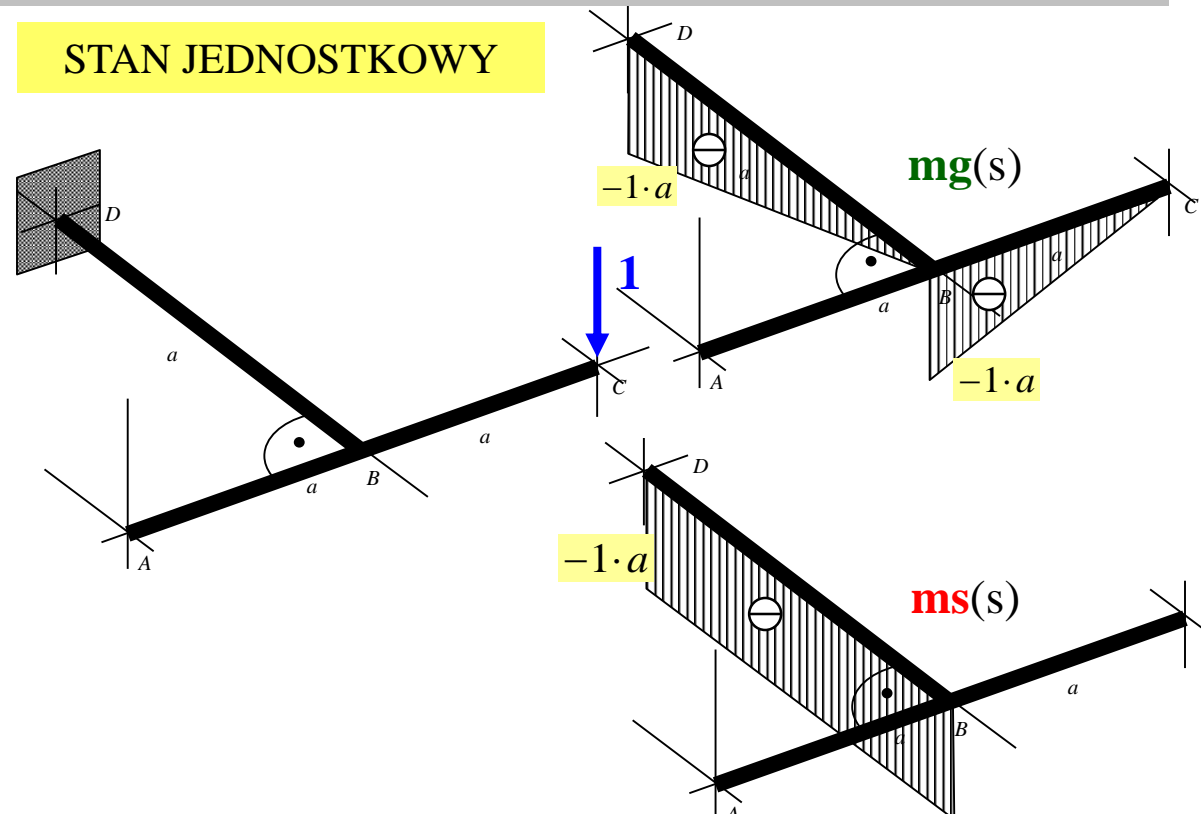
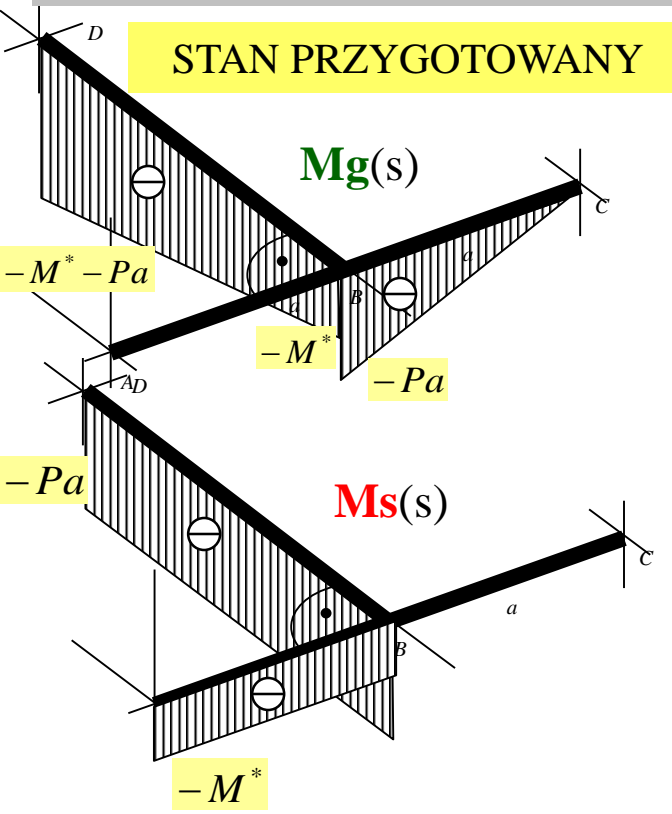
$$\rightarrow Mg(s) = -M^* - P \cdot s_3$$

Suma momentów wzgl. osi x_3 :

$$\rightarrow Ms(s) = -Pa$$



Wyznaczyć przemieszczenia pionowe punktu C $w_C = ?$

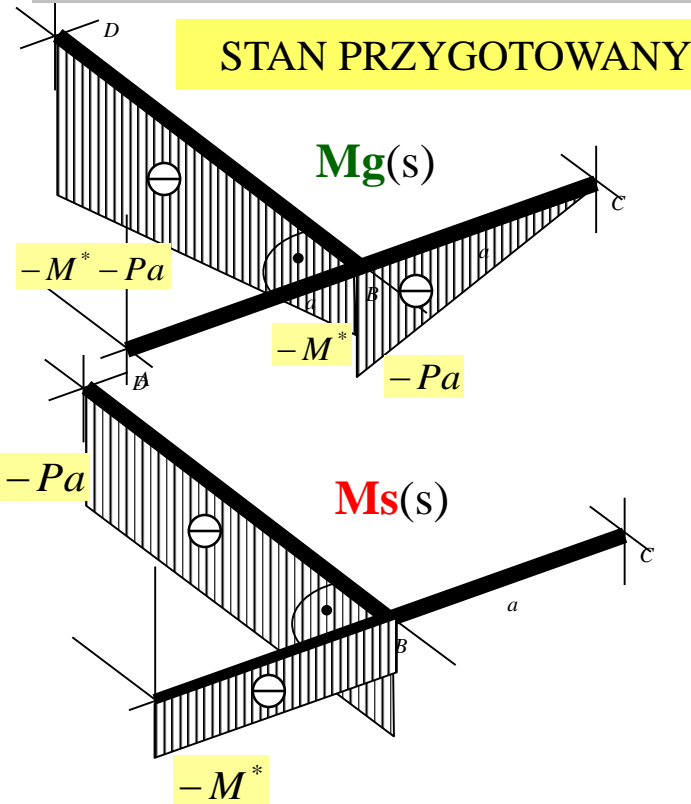


$$w_C \cong \sum_1^3 \left(\int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ_y} ds + \int_l \frac{M_s \cdot m_s}{GJ_s} ds \right) \stackrel{\text{t.W.}}{=} \frac{1}{GJ_s} [(-Pa)a \cdot (-a) + (-M^*a) \cdot 0 + 0] +$$

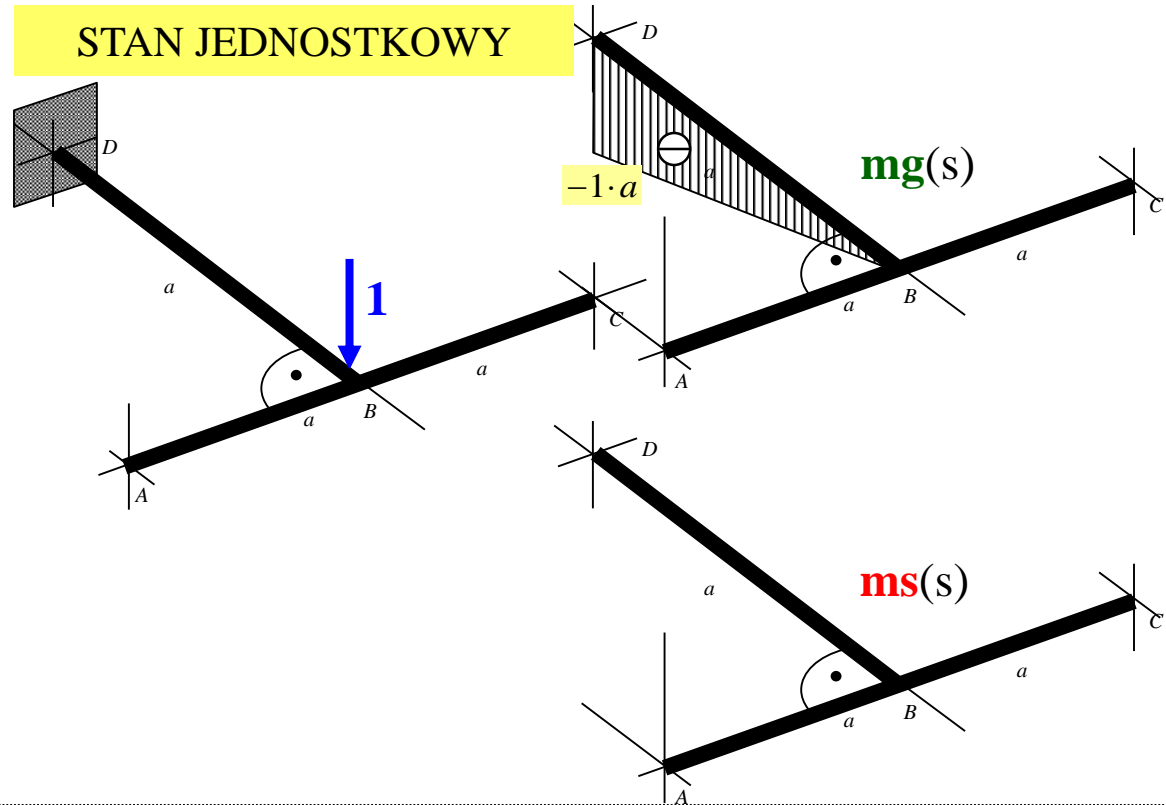
$$+ \frac{1}{EJ_y} \left[-M^*a \cdot \frac{1}{2}(-a) + \frac{1}{2}(-Pa)a \cdot \frac{2}{3}(-a) + \frac{1}{2}(-Pa)a \cdot \frac{2}{3}(-a) \right] = \frac{Pa^3}{GJ_s} + \frac{\frac{1}{2}M^*a^2 + \frac{2}{3}Pa^3}{EJ_y}$$

Wyznaczyć przemieszczenia pionowe punktu B $w_B = ?$

STAN PRZYGOTOWANY



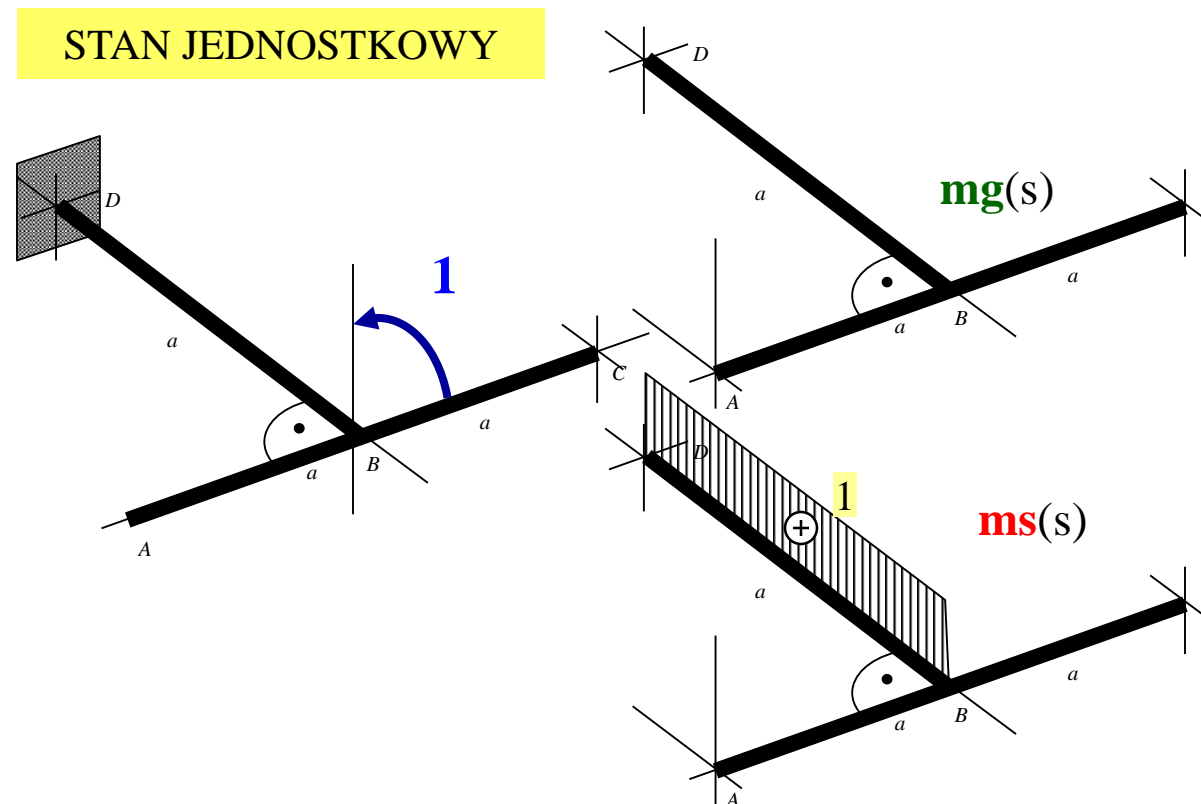
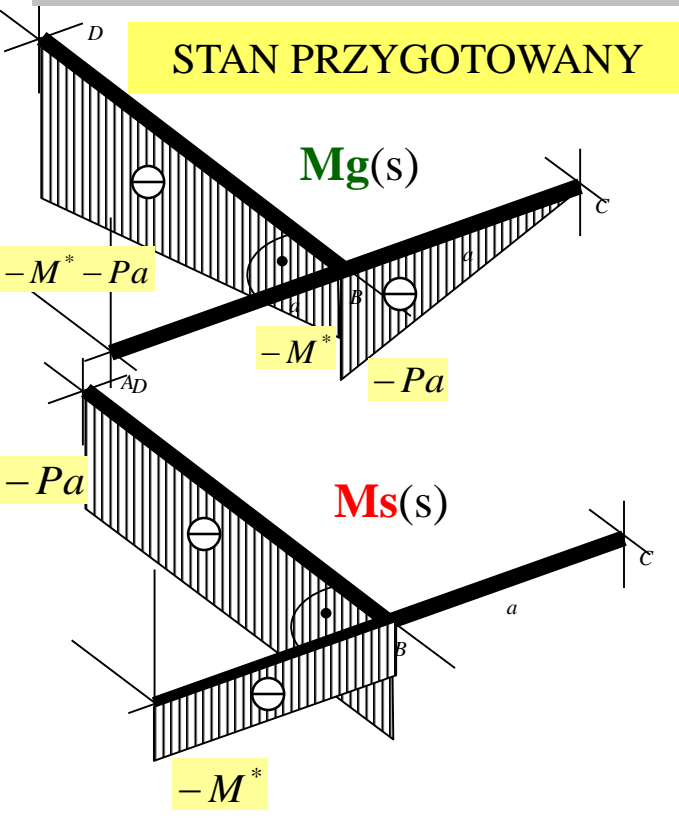
STAN JEDNOSTKOWY



$$w_B \cong \sum_1^3 \left(\int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ_y} ds + \int_l \frac{M_s \cdot m_s}{GJ_s} ds \right) \stackrel{\text{t.W.}}{=} \frac{1}{GJ_s} [(-Pa)a \cdot 0 + (-M^*a) \cdot 0 + 0] +$$

$$+ \frac{1}{EJ_y} \left[-M^*a \cdot \frac{1}{2}(-a) + \frac{1}{2}(-Pa)a \cdot \frac{2}{3}(-a) + \frac{1}{2}(-Pa)a \cdot 0 \right] = \frac{\frac{1}{2}M^*a^2 + \frac{1}{3}Pa^3}{EJ_y}$$

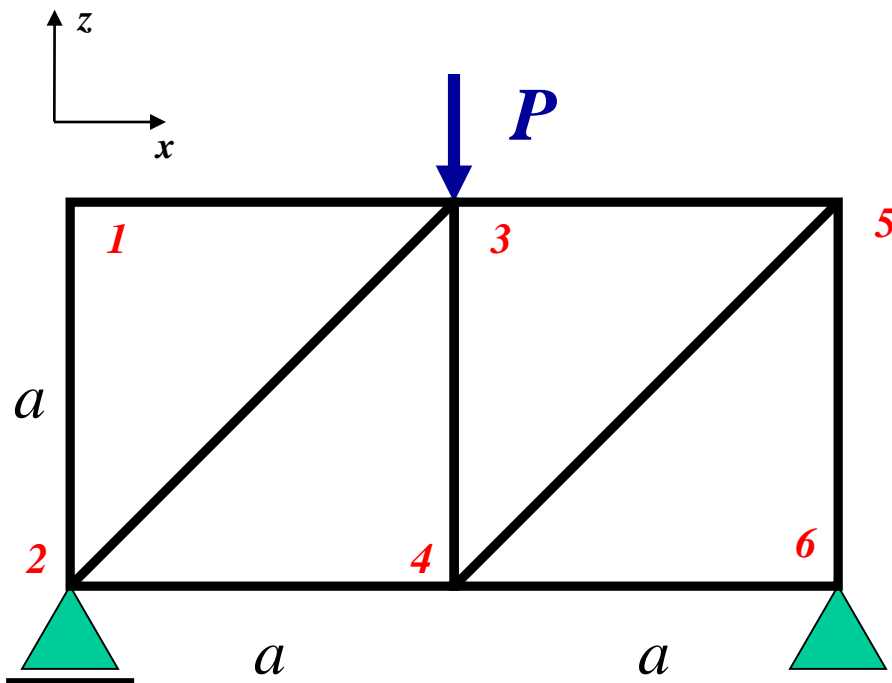
Wyznaczyć kąt obrotu naroża B względem osi BD $\upsilon_B = ?$



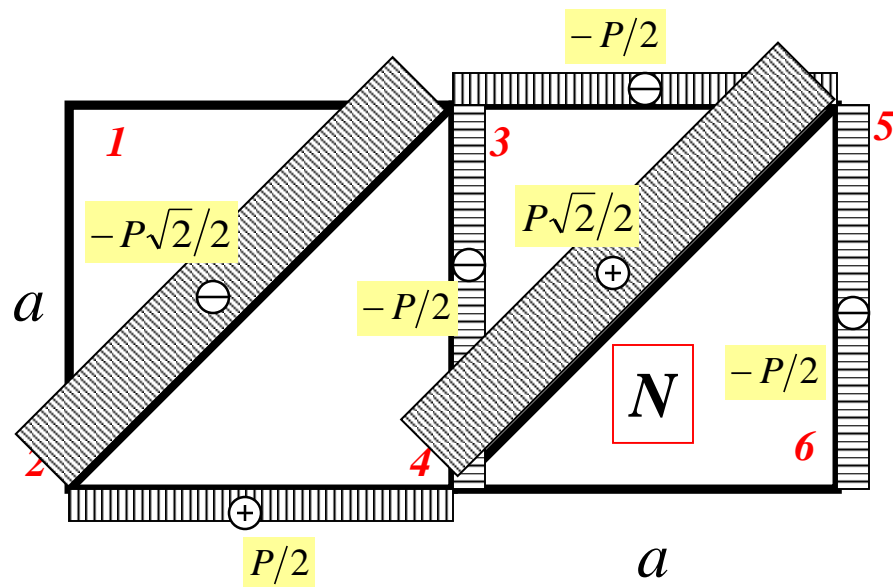
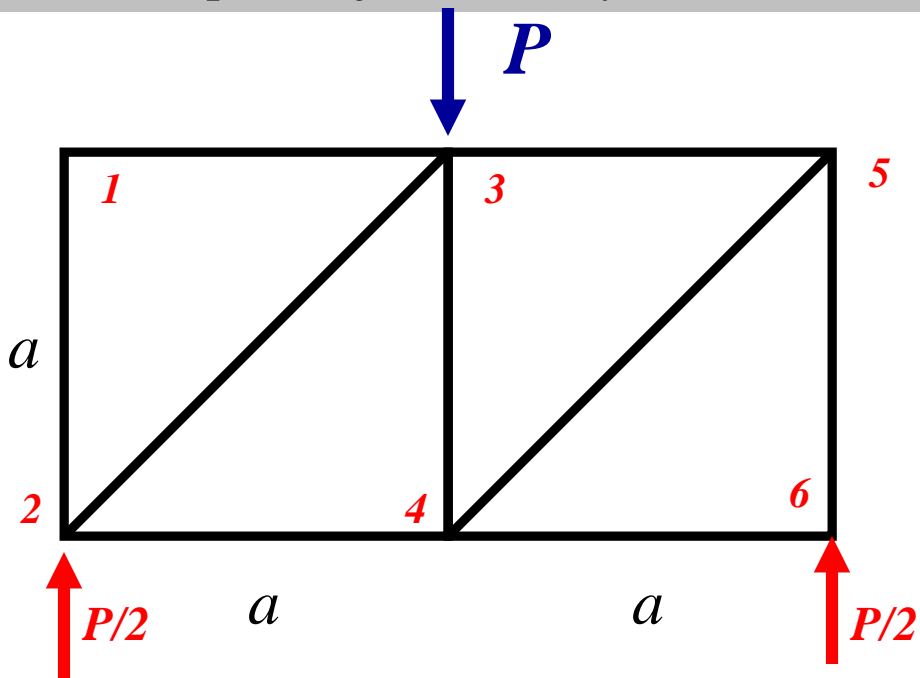
$$\upsilon_B \cong \sum_1^3 \left(\int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ_y} ds + \int_l \frac{M_s \cdot m_s}{GJ_s} ds \right) \stackrel{\text{t.W.}}{=} \frac{1}{GJ_s} [(-Pa)a \cdot 1] = -\frac{Pa^2}{GJ_s}$$

Zad.3. Wyznaczyć przemieszczenia w płaskiej kratownicy

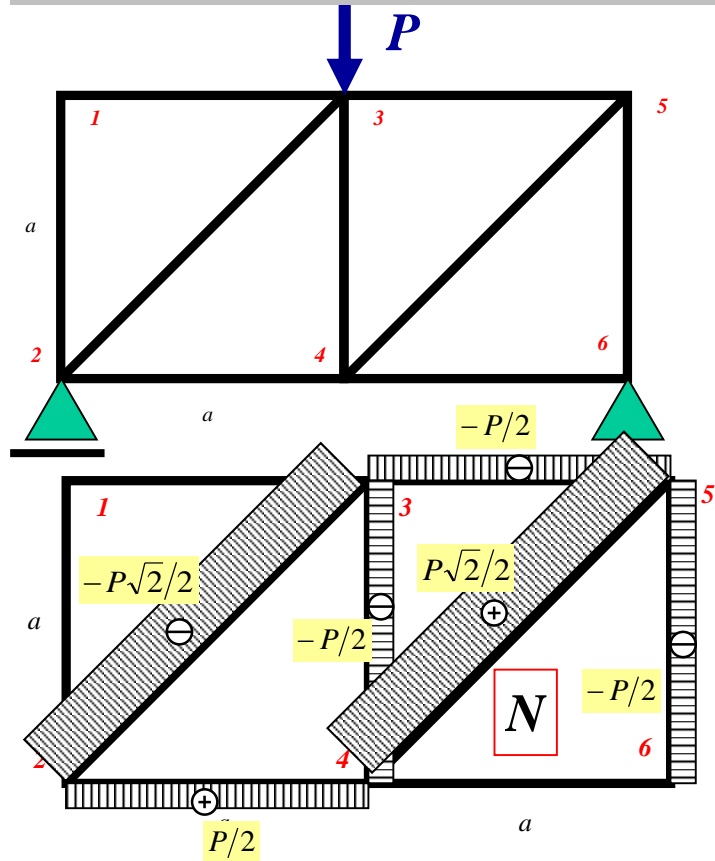
Dane: P , a , $EA = \text{const}$



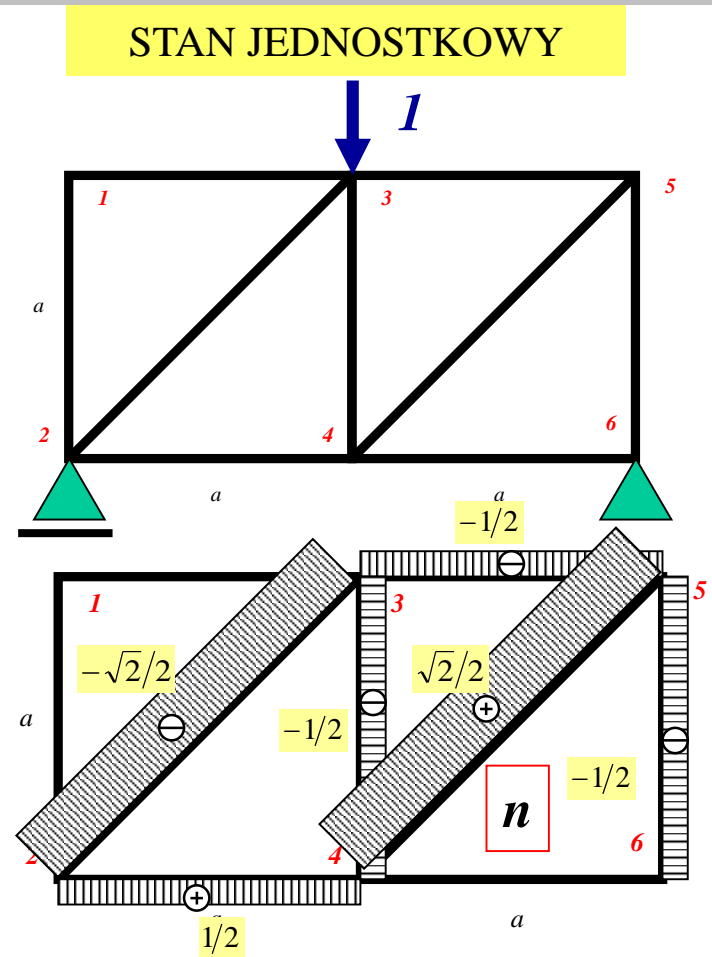
STAN PRZYGOTOWANY



Wyznaczyć przemieszczenie pionowe węzła nr 3 $w_3 = ?$



STAN PRZYGOTOWANY

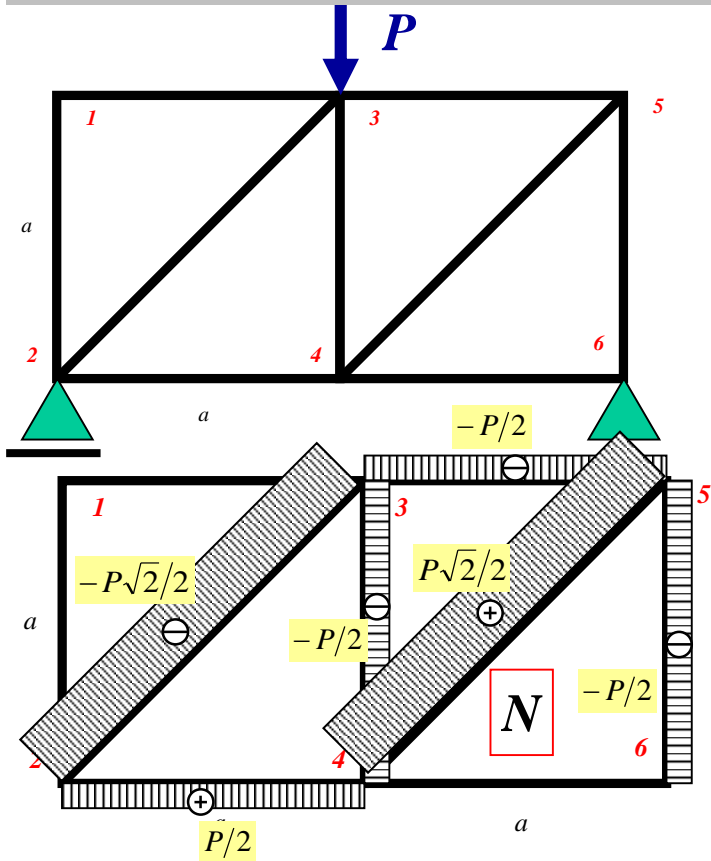


STAN JEDNOSTKOWY

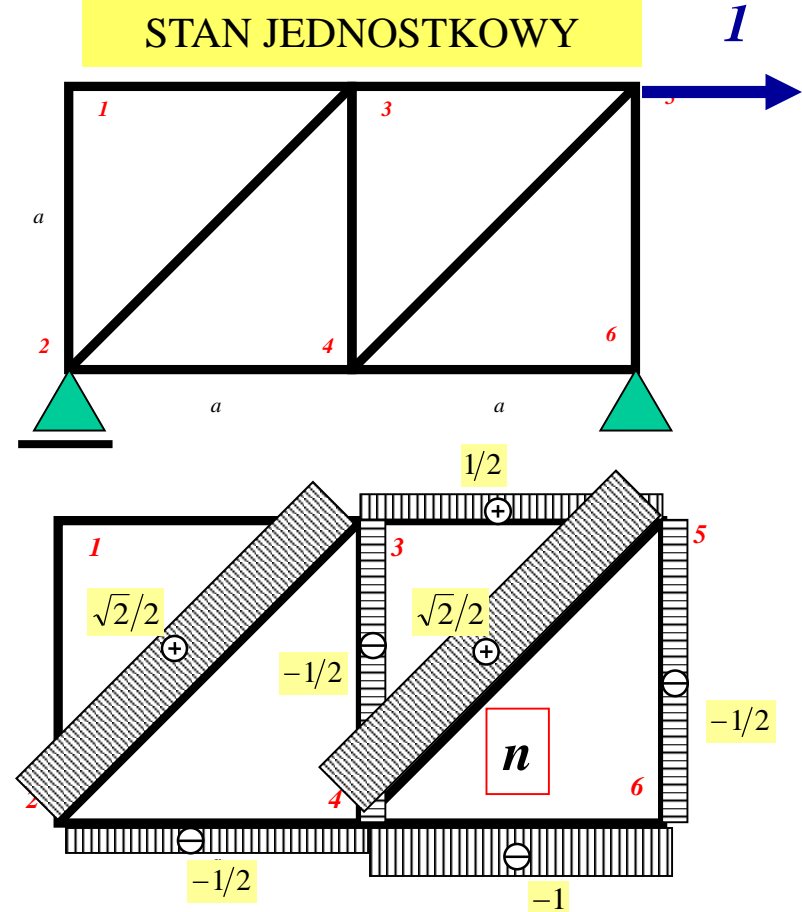
$$w_3 \cong \sum_1^9 \frac{N_i n_i l_i}{EA_i} = \frac{1}{EA} \left[\frac{-P\sqrt{2}}{2} \frac{-\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} + \frac{P\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} + \frac{-P}{2} \frac{-1}{2} a + \frac{P}{2} \frac{1}{2} a + \frac{-P}{2} \frac{-1}{2} a + \frac{-P}{2} \frac{-1}{2} a + 0 \right]$$

$$w_3 = \frac{Pa}{EA} (1 + \sqrt{2})$$

Wyznaczyć przemieszczenie poziome węzła nr 5 $u_5 = ?$



STAN PRZYGOTOWANY



STAN JEDNOSTKOWY

$$u_5 \cong \sum_1^8 \frac{N_i n_i l_i}{EA_i} = \frac{1}{EA} \left[\frac{-P\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} + \frac{P\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} + \frac{-P}{2} \frac{1}{2} a + \frac{P}{2} \frac{-1}{2} a + \frac{-P}{2} \frac{-1}{2} a + \frac{-P}{2} \frac{-1}{2} a + 0 \right]$$

$u_5 = 0$